数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 125-134

On the condition of Abrahamse for the extended interpolation

奈良女子大学 理学部　　高橋 世知子 (Sechiko Takahashi)

はじめに 複素平面上の互いに交わらない $m+1$ 個の解析的単純閉曲線 $\gamma_0,\cdots,\gamma_m$ で囲まれた領域を D とする。領域 D 内に k 個の相異なる点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ と各点 z_i $(i=1,\cdots,k)$ に対して、n_i 個の複素数 c_{is} $(s=0,\cdots,n_i-1)$ を与え、点 z_i での Taylor 展開の最初の n_i 個の係数が c_{is} となるような D で正則かつ $|f|\leq 1$ となる函数 f が存在する為の必要十分条件を求める問題について考える。この問題を拡張された補間問題ー extended interpolation problem ーと呼んでいる。

多重連結領域に対する Pick の補間問題 ($n_i=1$ の場合) については、Abrahamse が 1979 年に 解の存在定理を与えているが (Abrahamse [1])、その手法をそのまま拡張された場合にも適用することが出来る (Takahashi [17])。$n=n_1+\cdots+n_k$ とするとき、解の存在は、周期を持った核函数と与えられたデータ $\{z_i\},\{c_{is}\}$ に依存する沢山の $n\times n$ Hermite 行列 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ の半正定値性で与えられるが、この判定行列 A_α の数をどの位迄少なくできるかが、Abrahamse 以来の問題になっている。この問へのアプローチの最初の段階として、$n=2$ の場合について考察する。

1. まず、$m+1$ 重連結領域 D に於ける拡張された補間問題の解の存在定理について述べる。固定された点 $z^*\in D$ に対する $\partial D=\bigcup_{i=0}^m\gamma_i$ 上の調和測度を $d\omega$ とする。これは ∂D 上に実数値連続函数 u を与えたときの Dirichlet 問題の解 $\tilde{u}$ (D での調和函数) の z^* での値を表示する測度である。即ち $\tilde{u}(z_*)=\int_{\partial D}u\,d\omega$.

$T^m:=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m):|\alpha_i|=1(i=1,\cdots,m)\}$ を m 次元 torus とする。D に γ_i 上から出発して γ_0 上に終点を持つ互いに交わらない m 個の analytic cuts δ_i $(i=1,\cdots,m)$ を入れ、$D_0=D\setminus(\bigcup_{i=1}^m\delta_i)$ が単連結になるようにする。$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in T^m$ に対して、D で定義された複素数値函数 f で、D_0 で正則、任意の $t\in\delta_i\cap D$ に対して、δ_i の右から $z\to t$ のとき $f(z)\to\alpha_i f(t)$、δ_i の左から $z\to t$ のとき $f(z)\to f(t)$ となる函数 f の全体を $H_\alpha(D)$ とし、

$H_\alpha^2:=\{f:f\in H_\alpha(D),\ |f|^2$ が D で調和な優函数を持つ $\}$

$H_\alpha^\infty := \{f : f \in H_\alpha(D),\ |f|$ は D で有界$\}$

とする。$\alpha = (1, \cdots, 1)$ に対しては、H_α^2 はいわゆる Hardy 空間 H^2 であり、H^2 の場合と殆ど同様のことが、H_α^2 でも成り立っている (Rudin [12], Widom [19])。

任意の $f \in H_\alpha^2$ は non-tangential limits $f^*(t)$ (a.e. $t \in \partial D$) を持ち、$f^* \in L^2 = L^2(\partial D, d\omega)$ である。f と f^* を同一視することにより、H_α^2 は内積

$$\langle f, g\rangle = \int_{\partial D} f^* \overline{g^*}\, d\omega \qquad (f, g \in H_\alpha^2).$$

を持つ Hilbert 空間となる。各点 $p \in D$ に対し、写像 $f \mapsto f(p)$ は H_α^2 上の有界線形汎函数となり、Riesz の表現定理により H_α^2 の核函数 $k_\alpha(z, \zeta)$ が存在する。$k_\alpha(z, \zeta)$ は $(z, \overline{\zeta})$ に関して $D_0 \times D_0$ で正則であり、次の性質を持っている。

$$k_\alpha(\ , \zeta) \in H_\alpha^2 \quad (\zeta \in D), \qquad f(\zeta) = \langle f, k_\alpha(\ , \zeta)\rangle \quad (\forall f \in H_\alpha^2, \quad \zeta \in D),$$

$$k_\alpha(z, \zeta) = \langle k_\alpha(\ , \zeta), k_\alpha(\ , z)\rangle = \overline{k_\alpha(\zeta, z)} \quad ((z, \zeta) \in D \times D).$$

以上の準備のもとで、解の存在定理は次の様に表される。

$z_1, z_2, \cdots, z_k$ を領域 D 内の k 個の相異なる点とし、各点 z_i に n_i 個の複素数 $c_{i0}, \cdots, c_{in_i-1}$ が与えられているとし, 次の条件 $(*)$ を考える。

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{s=0}^{n_i-1} c_{is}(z - z_i)^s + O((z - z_i)^{n_i}) \qquad (i = 1, \cdots, k).$$

各 $\alpha \in T^m$ に対して、上で定義した $k_\alpha(z, \zeta)$ の点 (z_i, z_j) に於ける展開

$$k_\alpha(z, \zeta) = \sum_{s.t=0}^{\infty} a_{st}^{(\alpha)} (z - z_i)^s \overline{(\zeta - z_j)}^t$$

の係数 a_{st} $(0 \le s \le n_i - 1, 0 \le t \le n_j - 1)$ 及び $c_{is}(0 \le s \le n_i - 1)$ を用いて次の行列を定義する。

$$\Gamma_{ij}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{st}^{(\alpha)} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}, \qquad C_i = \begin{bmatrix} c_{i0} & & & \\ c_{i1} & c_{i0} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_{in_i-1} & \cdots & c_{i1} & c_{i0} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_\alpha = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(\alpha)} & \cdots & \Gamma_{1k}^{(\alpha)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{k1}^{(\alpha)} & \cdots & \Gamma_{kk}^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{bmatrix},$$

$$A_\alpha = \Gamma_\alpha - C\cdot\Gamma_\alpha\cdot C^* \qquad (C^* = {}^t\,\overline{C})\,.$$

定理 1　(a) 条件 $(*)$ を満たす Dで正則、かつ $|f|\le 1$ である函数 f が存在する為の必要十分条件は、任意の $\alpha\in T^m$ に対して $A_\alpha \ge 0$ となることである。

(b) 解が一意的である為の必要十分条件は、ある $\alpha\in T^m$に対して $\det A_\alpha = 0$ となることである (Abrahamse [1], Takahashi [17])。

上の定理は特別な場合として、m=0 の場合 即ち D が単位円の場合を含んでいる。このときは 1 つの核函数 $k(z,\zeta)$ のみであり、$z^*=0$ とした調和測度に対して、$k(z,\zeta) = 1/(1-z\overline{\zeta})$ である。

2.　Abrahamse は論文 [1] の終わりに次の様な例とコメントを与えている。

$\alpha=(1,\cdots,1)$ に対する核函数 $k_\alpha(z,\zeta)$ を $k(z,\zeta)$ と表す。即ちこれは Szegö の核函数であり, $k(z_1,z_2)=0$ となる点 $z_1,z_2\in D$が存在する (Bergman [3])。この様な点 z_1,z_2 と値 w_1,w_2 を与え補間問題を考えると、対応する判定行列は

$$\begin{bmatrix} (1-|w_1|^2)\,k(z_1,z_1) & 0 \\ 0 & (1-|w_2|^2)\,k(z_2,z_2) \end{bmatrix}$$

となる。$k(z_1,z_1)>0,\ k(z_2,z_2)>0$ より、$|w_1|\le 1,\ |w_2|\le 1$ のとき、かつそのときに限りこの行列は非負である。明らかにこの条件は、$f(z_1)=w_1, f(z_2)=w_2, |f|\le 1$ を満たす Dでの正則函数 fが存在する為の必要十分条件にはなり得ない (例えば、$w_1=0,\ w_2=1$ のとき)。この例は、単位円の場合のときの様に Szegö 核のみを考えるのでは不十分であることを示している。

それでは、どの様な部分集合 $\Lambda_0\subset\Lambda=T^m$ に対して、定理 1 を成り立たせることが可能なのか？—The author conjectures that density of Λ_0 in Λ is needed; if Λ_0 omits a non-empty open subset of Λ, then theorem fails.—と。

$n=2$ の場合は、この conjecture に反して、Λ_0 を唯一点から成る集合とすることができる。以下そのことについて述べる。

3.　D上の有界な多価正則函数についての最大値の原理を準備する。

$\mathcal{B}:=\{f : D$で正則かつ $|f|\le 1\}$,　$\mathcal{B}_\alpha:=\{f : f\in H^\infty_\alpha,\ |f|\le 1\}$　$(\alpha\in T^m)$

とおく。$p\in D$ を極に持つ Dの Green 函数を $g(z;p)$ とし、調和函数 h に対して、その共役調和函数を ${}^*h$ で表すことにする。

$z_1, \cdots, z_r$ を 領域 D の点列とするとき、函数

$$B(z) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{r} g(z; z_i) - i\, {}^{*}\left(\sum_{i=1}^{r} g(z; z_i)\right)\right]$$

を Dでの $\{z_1, \cdots, z_r\}$ に関する r 次の *Blaschke product* という。B は $\{z_i\}_{i=1}^{r}$ を丁度その零点に持つ $|B|$ が一価な多価函数であるが、D_0での一価な分枝を考えるとそれ等はある $\mathcal{B}_\alpha$ $(\alpha \in T^m)$ に属している。B の周期は α であるといい、今後 B を $\mathcal{B}_\alpha$ の要素とみなし、適当に一価な分枝をとったものとする。$|\lambda| = 1$ となる $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、λB も又 Blaschke product と呼ぶことにする。

点 $p \in D$及び $\alpha \in T^m$ に対し

$$m(p, \alpha) := \sup\{|f(p)| : f \in \mathcal{B}_\alpha\}$$

と定義する。$\alpha_0 = (1, \cdots, 1)$ とすると、任意の $p \in D$ に対して、$m(p, \alpha_0) = 1$ であり、任意の $p \in D$ と $\alpha \in T^m$ に対して $0 \leq m(p, \alpha) \leq 1$ である。

定理 2　任意の $p \in D$ 及び $\alpha \in T^m$ に対して、$\mathcal{B}_\alpha^2$ のなかに $F(p) = m(p, \alpha)$ を満たす函数 F が唯一つ存在し、それは高々 m 次の Blaschke product である。従って、その零点を $z_1, \cdots, z_r$ $(r \leq m)$ とすると、

$$m(p, \alpha) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{r} g(z_i; p)\right]$$

と表される (Widom [19], [20], cf. Fisher [4])。

4.　点 $z_0 \in D$ のみを零点とする Blaschke product を $B(\ , z_0)$ とし、$B(\ , z_0)$ の周期を $\alpha(z_0)$ と表すことにする。$f \in \mathcal{B}$ に対して、$(f - f(z_0))/(1 - \overline{f(z_0)} f) \in \mathcal{B}$ であり、ある $g \in \mathcal{B}_{\alpha(z_0)^{-1}}$ が存在して

$$\frac{f - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f} = B(\ , z_0)\, g$$

と表される。前節 **3** の定義より、$|g(z)| \leq m(z, \alpha(z_0)^{-1})$ $(\forall z \in D)$ であるから、

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}\right| \leq \exp[-g(z; z_0)]\, m(z, \alpha(z_0)^{-1}) \qquad (z, z_0 \in D) \tag{1}$$

が成り立つ。これは、Dが単位円の場合は Schwarz-Pick の補題の不等式

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\right|$$

に相当している。

D 内の2点 z_1, z_2 をとる。$f \in \mathcal{B}$ に対して、(1) より

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \exp[-g(z_1;z_2)]\, m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}), \tag{2}$$

z_1とz_2を入れ換えて、

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \exp[-g(z_2;z_1)]\, m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$$

が成り立つ。$m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}) = m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$ を示す。$z_1 = z_2$ のときは明らかであるから、$z_1 \neq z_2$ とし、次の極値函数を定義する。

$$F_1 := B(\ , z_1)\, B_1, \quad \text{ここで} \quad B_1 \in \mathcal{B}_{\alpha(z_1)^{-1}} \quad \text{s.t.} \quad B_1(z_2) = m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}).$$

定理2より B_1 は高々 m 次の Blaschke product であるが、$F_1 \in \mathcal{B}$ であることより、丁度 m 次の Blaschke product でなければならず、F_1 は $m+1$ 次の Blaschke product であることがわかる。

$$F_1(z_1) = 0, \qquad F_1(z_2) = B(z_2, z_1)\, m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$$

となり、(2) の式に当てはめると、$z_1 \neq z_2$ であるから、

$$m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}) \leq m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$$

がいえる。同様にして、

$$F_2 := B(, z_2)\, B_2, \quad \text{ここで} \quad B_2 \in \mathcal{B}_{\alpha(z_2)^{-1}}, \quad \text{s.t.} \quad B_2(z_1) = m(z_1, \alpha(z_2)^{-1})$$

$$F_2(z_2) = 0, \qquad F_2(z_1) = B(z_1, z_2)\, m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}),$$

$$m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}) \leq m(z_2, \alpha(z_1)^{-1}),$$

従って $m(z_1, \alpha(z_2)^{-1}) = m(z_2, \alpha(z_1)^{-1})$ が成り立つ。$\{z_1, z_2\}$ によって決まる数として、これを $M(z_1, z_2)$ と表すことにする。極値函数について次のことがいえる。

$z_1 \neq z_2$ となる D 内の2点 z_1, z_2 に対して、$F(z_1) = 0$ となる 函数 $F \in \mathcal{B}$ のうち $|F(z_2)|$ を最大にするものは回転を除いて唯一つ決まる。それは $m+1$ 次の Blaschke product であり、その最大値は $\exp[-g(z_1;z_2)]\, M(z_1, z_2)$ である。

5. $n=2$ の場合の拡張された補間問題について考える。i) $k=2,\ n_1=n_2=1$ と ii) $k=1,\ n_1=2$ の 2 つの場合が考えられる。

i) の場合。 領域 D 内の相異なる 2 点 z_1, z_2 と値 $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ を与える。定理 1 より

$$f(z_1)=w_1,\quad f(z_2)=w_2 \tag{3}$$

となる $f \in \mathcal{B}$ が存在する為の必要十分条件は

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} (1-|w_1|^2)k_\alpha(z_1,z_1) & (1-w_1\overline{w_2})k_\alpha(z_1,z_2) \\ (1-w_2\overline{w_1})k_\alpha(z_2,z_1) & (1-|w_2|^2)k_\alpha(z_2,z_2) \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (\forall\alpha \in T^m) \tag{4}$$

となることである。

いま、$w_1=0,\ w_2=B(z_2,z_1)M(z_1,z_2)$ とする。このときは前節 4 でみたように、F_1 が唯一つの解となる。従って、ここで

$$\exp[-g(z_1,z_2)]M(z_1,z_2)=\mathcal{C}(z_1,z_2)$$

とおくと、A_α の行列式 $|A_\alpha|$ について、任意の $\alpha \in T^m$ に対して、

$$\begin{vmatrix} k_\alpha(z_1,z_1) & k_\alpha(z_1,z_2) \\ k_\alpha(z_2,z_1) & (1-\mathcal{C}(z_1,z_2)^2)k_\alpha(z_2,z_2) \end{vmatrix} \geq 0, \tag{5}$$

ある $\alpha_0 \in T^m$ に対して、

$$\begin{vmatrix} k_{\alpha_0}(z_1,z_1) & k_{\alpha_0}(z_1,z_2) \\ k_{\alpha_0}(z_2,z_1) & (1-\mathcal{C}(z_1,z_2)^2)k_{\alpha_0}(z_2,z_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

が成り立っている。$k_\alpha(z_1,z_1)>0,\ k_\alpha(z_2,z_2)>0$ であるから、

$$K_\alpha(z_1,z_2)=\frac{k_\alpha(z_1,z_1)k_\alpha(z_2,z_2)-k_\alpha(z_1,z_2)k_\alpha(z_2,z_1)}{k_\alpha(z_1,z_1)k_\alpha(z_2,z_2)}$$

とおき、(5),(6) を計算すると、

$$\mathcal{C}(z_1,z_2)^2=K_{\alpha_0}(z_1,z_2)\leq K_\alpha(z_1,z_2) \qquad (\forall\alpha \in T^m) \tag{7}$$

が成り立つ。

最初の補間問題 (3) に戻って、(4) より

$$|A_\alpha| = (1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)k_\alpha(z_1,z_1)k_\alpha(z_2,z_2) - |1-w_1\overline{w_2}|^2 k_\alpha(z_1,z_2)k_\alpha(z_2,z_1)\,.$$

(7) より、$|A_{\alpha_0}| \geq 0$ ならば $|A_\alpha| \geq 0$ $(\forall\alpha \in T^m)$ がいえる。また、$A_{\alpha_0} \geq 0$ とすると、$(1-|w_1|^2)k_{\alpha_0}(z_1,z_1) \geq 0$, $(1-|w_2|^2)k_{\alpha_0}(z_2,z_2) \geq 0$, 従って $|w_1| \leq 1$, $|w_2| \leq 1$ であるので、

$$A_{\alpha_0} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_\alpha \geq 0 \qquad (\forall\alpha \in T^m)$$

が成り立ち、次の定理を得る。

定理 3　領域 D 内の相異なる 2 点 z_1, z_2 に対して、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在し次が成り立つ。w_1, $w_2 \in \mathbb{C}$ に対して、

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2$$

となる $f \in \mathcal{B}$ が存在する為の必要十分条件は

$$A_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} (1-|w_1|^2)k_{\alpha_0}(z_1,z_1) & (1-w_1\overline{w_2})k_{\alpha_0}(z_1,z_2) \\ \\ (1-w_2\overline{w_1})k_{\alpha_0}(z_2,z_1) & (1-|w_2|^2)k_{\alpha_0}(z_2,z_2) \end{bmatrix} \geq 0$$

となることである。

上の定理 3 より次のことがわかる。(4) に於いて w_2 を変数と見なし、$|A_\alpha| \geq 0$ を計算すると、

$$\Gamma_\alpha = \{w_2 : |A_\alpha| \geq 0\}$$

は単位円内の非退化な閉円となり、$\Gamma_{\alpha_0} \subset \Gamma_\alpha$ $(\forall\alpha \in T^m)$ であり、

$$\Gamma_{\alpha_0} = \{f(z_2) :\ f(z_1) = w_1,\ f \in \mathcal{B}\}\,.$$

ii) **の場合。**　1 点 $z_1 \in D$ と 2 つの複素数 $\{c_0,\ c_1\}$ を与える。定理 1 より、点 z_1 で

(8)
$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_1) + \cdots\cdots$$

と表される $f \in \mathcal{B}$ の存在する為の必要十分条件は、$k_\alpha(z,\zeta)$ の (z_1,z_1) での展開を

$$k_\alpha(z,\zeta) = \sum_{s.t=0}^{\infty} a_{st}^{(\alpha)}(z-z_1)^s\overline{(\zeta-z_1)}^t$$

とするとき、

$$(9)\qquad A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_0 & \\ c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c_0} & \overline{c_1} \\ & \overline{c_0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \alpha \in T^m)$$

となることである。

i) の場合と比べて、計算が少し複雑になるので、$c_0 = 0$ の場合について考える。函数の Möbius 変換 によって判定行列の rank 及び半正定値性は不変であるから、このことは一般性を失わない。簡略に述べると次の様なことである。

f の Möbius 変換 を

$$g = \frac{f - c_0}{1 - \overline{c_0} f}$$

とおくと、f の係数 $\{c_0,\ c_1\}$ に対して g には別の係数 $\{0,\ c_1'\}$ が対応している。$\{0,\ c_1'\}$ に対する判定行列を A_α' とするとき、上の Möbius 変換 によって決まるある正則行列 N が存在し、

$$A_\alpha' = N \cdot A_\alpha \cdot N^*$$

と表される (Takahashi [15],[17])。

$c_0 = 0$ として、(9) を計算すると、

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha)} & a_{01}^{(\alpha)} \\ a_{10}^{(\alpha)} & -|c_1|^2 a_{00}^{(\alpha)} + a_{11}^{(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

次の極値函数を定義する。

$$F := B(\ , z_1)\, \widetilde{B}, \quad ここで \quad \widetilde{B} \in \mathcal{B}_{\alpha(z_1)^{-1}} \text{ s.t. } \widetilde{B}(z_1) = m(z_1, \alpha(z_1)^{-1}) = M(z_1, z_1).$$

$F(z_1) = 0,\ F'(z_1) = B'(z_1, z_1)\, M(z_1, z_1)$ となり、F はいわゆる Ahlfors 函数である。

$c_0 = 0, c_1 = B'(z_1, z_1)\, M(z_1, z_1)$ としたとき、Fはその一意的な解であるから、

$$|B'(z_1, z_1)| M(z_1, z_1) = \widetilde{C}(z_1, z_1),$$

$$\widetilde{K}_\alpha(z_1, z_1) = \frac{a_{00}^{(\alpha)} a_{11}^{(\alpha)} - a_{01}^{(\alpha)} a_{10}^{(\alpha)}}{(a_{00}^{(\alpha)})^2}$$

とおき i) の場合と同様に計算すると、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在して、

$$\widetilde{C}(z_1, z_1)^2 = \widetilde{K}_{\alpha_0}(z_1, z_1) \leq \widetilde{K}_\alpha(z_1, z_1) \qquad (\forall \alpha \in T^m),$$

また $-\widetilde{C}(z_1,z_1)^2 a_{00}^{(\alpha)} + a_{11}^{(\alpha)} \geq 0$ $(\forall\alpha \in T^m)$ となることがわかる。

(10) より、

$$|A_\alpha| = (a_{00}^{(\alpha)})^2 \left[\widetilde{K}_\alpha(z_1,z_1) - |c_1|^2\right].$$

であり、$|A_{\alpha_0}| \geq 0$ のとき $|c_1|^2 \leq \widetilde{K}_{\alpha_0}(z_1,z_1) = \widetilde{C}(z_1,z_1)^2$ であるから

$$A_{\alpha_0} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_\alpha \geq 0 \qquad (\forall\alpha \in T^m)$$

が成り立ち、次の定理を得る。

定理4 D 内の一点 z_1 とそこでの次数2に対して、ある $\alpha_0 \in T^m$ が存在して次が成り立つ。2つの複素数 $\{c_0,\ c_1\}$ を与えたとき、点 z_1 での展開が

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_1) + \cdots\cdots$$

となる $f \in \mathcal{B}$ が存在する為の必要十分条件は

$$A_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha_0)} & a_{01}^{(\alpha_0)} \\ a_{10}^{(\alpha_0)} & a_{11}^{(\alpha_0)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_0 & \\ c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^{(\alpha_0)} & a_{01}^{(\alpha_0)} \\ a_{10}^{(\alpha_0)} & a_{11}^{(\alpha_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c_0} & \overline{c_1} \\ & \overline{c_0} \end{bmatrix} \geq 0$$

となることである。

References

[1] M. B. Abrahamse, *The Pick interpolation theorem for finitely connected domains*, Michigan Math. J. **26** (1979), 195–203.

[2] L. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[3] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping, 2nd ed.*, Mathematical Surveys, No 5 Amer. Math. Soc., 1970.

[4] S. D. Fisher, *Function Theory on Planer Domains*, Wiley, New York, 1983.

[5] P. R. Garabedian, *Schwarz's lemma and the Szegö kernel function*, Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 1–35.

[6] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[7] M. H. Heins, *Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly-connected region*, Amer. J. Math. **62** (1940), 91–106.

[8] M. H. Heins, *Nonpersistence of the grenzkreis phenomenon for Pick-Nevanlinna interpolation on annuli*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. **596** (1975).

[9] D. E. Marshall, *An elementary proof of Pick-Nevanlinna interpolation theorem*, Michigan Math. J. **21** (1974), 219–223.

[10] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analytische Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A **32** (1929), No 7.

[11] G. Pick, *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann. **77** (1916), 7–23.

[12] W. Rudin, *Analytic functions of class H_p*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 46–66.

[13] S. Saitoh, *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*, Pitman Research Notes in Math. **189**, Longman, Harlow, 1988.

[14] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine Angew. Math. **147** (1917), 205–232.

[15] S. Takahashi, *Extension of the theorems of Carathéodory-Toeplitz-Schur and Pick*, Pacific J. Math. **138** (1989), 391–399.

[16] S. Takahashi, *Nevanlinna parametrizations for the extended interpolation problem*, Pacific J. Math. **146** (1990), 115–129.

[17] S. Takahashi, *Extended interpolation problem in finitely connected domains*, Oper. Theory Adv. Appl. **59** (1992), 305–327, Birkhäuser Verlag, Basel.

[18] S. Takahashi,, *A sufficient condition for Nevanlinna parametrization and an extension of Heins theorem*, Nagoya Math. J. (to appear).

[19] H. Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane*, Advances in Math. **3** (1969), 127–232.

[20] H. Widom, *The maximum principle for multiple-valued analytic functions*, Acta Math. **126** (1971), 63–82.